半導体の Energy transport model の緩和極限

鈴木 政尋　(東京工業大学情報理工学研究科)
西畑 伸也　(東京工業大学情報理工学研究科)

本講演では，半導体中の電子の流れを記述する Energy transport model (ET モデル) に対し，緩和時間 τ を 0 とする緩和極限について論じる．

$$\rho_t + j_x = 0, \tag{1a}$$

$$j = -(\theta\rho)_x + \rho\phi_x, \tag{1b}$$

$$\rho\theta_t + j\theta_x + \frac{2}{3}\left(\frac{j}{\rho}\right)_x \rho\theta - \frac{2}{3}\kappa_0\theta_{xx} = \frac{2}{3}\frac{j^2}{\rho} - \frac{\rho}{\tau}(\theta - \bar{\theta}), \tag{1c}$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \tag{1d}$$

ここで ρ, j, θ, ϕ は未知関数で，それぞれ電子密度，電流密度，絶対温度，電位を表す．また τ, $\bar{\theta}$ はそれぞれ緩和時間，室温を表す正定数であり，τ は半導体中に電子が密に存在しているときには小さな値をとる．さらに，ドーピング・プロファイル $D(x)$ は半導体中に固定されている正イオンの分布を表す関数であり，ここでは有界連続性と正値性：$0 < c \leq D(x) \in \mathcal{B}^0(\overline{\Omega})$ を仮定する．半導体デバイスは非常に微細であるため，有界領域 $\Omega := (0,1)$ 上で (1) に次の境界条件を課した初期値境界値問題を考察する．

$$\rho(0,x) = \rho_0(x), \tag{2}$$

$$\theta(0,x) = \theta_0(x), \tag{3}$$

$$\rho(t,0) = \rho_l > 0, \quad \rho(t,1) = \rho_r > 0, \quad \phi(t,0) = 0, \quad \phi(t,1) = \phi_r \geq 0, \tag{4}$$

$$\theta_x(t,0) = \theta_x(t,1) = 0. \tag{5}$$

ここで，ρ_l, ρ_r, ϕ_r は定数である．ET モデルの定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ の一意的存在と漸近安定性は、次のようにまとめられる．なお、$\delta := |\rho_l - \rho_r| + |\phi_r|$ とする．

Lemma 1 任意の $\rho_l > 0$ に対して，ある正の定数 δ_0 が存在して，$\delta + \tau \leq \delta_0$ であれば, 方程式 (1) の定常問題と境界条件 (4), (5) を満たす解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{B}^2(\overline{\Omega})$ が一意的に存在する．

Theorem 2 初期値 $(\rho_0, \theta_0) \in H^2(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (4)，正値性 $\inf \rho_0$, $\inf \theta_0 > 0$ と両立条件 $\rho_0(0) = \rho_l$, $\rho_0(1) = \rho_r$, $\theta_{0x}(0) = \theta_{0x}(1) = 0$ を満たすとする．このとき，ある正定数 δ_0 に対して $\delta + \tau \leq \delta_0$ ならば，初期値境界値問題 (1)-(5) の解 $(\rho, j, \theta, \phi) \in C([0,\infty) : H^2) \times C([0,\infty) : H^1) \times C([0,\infty) : H^2) \times C([0,\infty) : H^2)$ が一意的に存在し，正値性 $\inf \rho$, $\inf \theta > 0$ を満たす．さらに，次の時間減衰評価

が成立する．

$$\begin{aligned}&\|(\rho-\tilde{\rho},\theta-\tilde{\theta})(t)\|_1^2+\|(j-\tilde{j})(t)\|^2\\&\qquad+\|(\phi-\tilde{\phi})(t)\|_3^2+t\|(\partial_x^2\{\rho-\tilde{\rho}\},\partial_x^2\{\theta-\tilde{\theta}\})(t)\|^2\\&\qquad\qquad+t\|\partial_x^1(j-\tilde{j})(t)\|^2+t\|\partial_x^4(\phi-\tilde{\phi})(t)\|^2\le Ce^{-\alpha t}.\end{aligned}$$

ここで，C と α は時間変数 t と緩和時間 τ によらない正定数である．

形式的に緩和時間 τ を 0 に近づけたとき，ET モデルは次の Drift diffusion model (DD モデル) に収束する．

$$\begin{aligned}\rho_t^0+j_x^0&=0,\\ j^0&=-\bar{\theta}\rho_x^0+\rho^0\phi_x^0,\\ \phi_{xx}^0&=\rho^0-D.\end{aligned}$$

ここで，初期値及び境界値は (2) と (4) で与える．DD モデルは一様に放物型な方程式と Poisson 方程式の連立系であることから，大きな初期値に対して時間大域解が存在し，その漸近挙動が定常解で与えられることが示される ([1])．

本講演では，緩和極限の数学的な正当性を与える．すなわち，緩和時間 τ を 0 に近づけると，ET モデルの解が DD モデルの解に収束することを示す．以下，ET モデル (1) の解を $(\rho^\tau,j^\tau,\theta^\tau,\phi^\tau)$ で表す．

Theorem 3 Theorem 2 の仮定の下で，次の評価が任意の $t\ge 0$ と $\tau\in(0,\delta_0]$ に対して成り立つ．

$$\|(\rho^\tau-\rho^0)(t)\|^2+\|(\phi^\tau-\phi^0)(t)\|_2^2\le C\tau^\gamma, \tag{6}$$

$$\|(\theta^\tau-\bar{\theta})(t)\|^2\le C\|\theta_0-\bar{\theta}\|^2e^{-\beta t/\tau}+C\tau^\gamma, \tag{7}$$

$$\|(\rho_x^\tau-\rho_x^0,\theta_x^\tau,j^\tau-j^0)(t)\|^2\le C\|\theta_0-\bar{\theta}\|_1^2e^{-\beta t/\sqrt{\tau}}+C\tau^\gamma. \tag{8}$$

ここで，β, γ 及び C は時間変数 t と緩和時間 τ には依存しない正定数である．

注意　DD モデルでは温度変化がないため、初期時刻での温度は室温 $\bar{\theta}$ となる．この $\bar{\theta}$ と ET モデルに対する初期温度 $\theta_0(x)$ の差から初期層が生じるが，不等式 (7) と (8) の右辺第一項はその大きさが指数関数的に減衰することを意味している．

記号　整数 $i\ge 0$ について，$H^i(\Omega)$ は Sobolev 空間であり，そのノルムを $\|\cdot\|_i$ と書く．さらに，$\|\cdot\|:=\|\cdot\|_0$ とする．

参考文献

[1] S. Nishibata and M. Suzuki, Relaxation limit of a time global solution to a hydrodynamic model of semiconductors, to appear

[2] S. Nishibata and M. Suzuki, Initial boundary value problems for a quantum hydrodynamic model of semiconductors: asymptotic behaviors and classical limits, to appear in *J. Differ. Equ.*.

[3] S. Nishibata and M. Suzuki, Asymptotic stability of a stationary solution to a thermal hydrodynamic model for semiconductors, to appear in *Arch. Ration. Mech. Anal.*.