半導体の Heat-conductive hydrodynamic model の緩和極限

鈴木 政尋　(東京工業大学情報理工学研究科)
西畑 伸也　(東京工業大学情報理工学研究科)

本講演では，半導体中の電子流を記述する Heat-conductive hydrodynamic model (HHD モデル) の解の長時間挙動と緩和極限について論じる．

$$\rho_t + j_x = 0, \tag{1a}$$
$$\varepsilon j_t + \left(\varepsilon j^2/\rho + \rho\theta\right)_x = \rho\phi_x - j, \tag{1b}$$
$$\rho\theta_t + j\theta_x + \frac{2}{3}\left(\frac{j}{\rho}\right)_x \rho\theta - \frac{2}{3}\left(\kappa\theta_x\right)_x = \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{3\lambda}\right)\frac{j^2}{\rho} - \frac{\rho}{\lambda}(\theta - \bar{\theta}), \tag{1c}$$
$$\phi_{xx} = \rho - D. \tag{1d}$$

ここで，ρ, j, θ, ϕ は未知関数で，それぞれ電子密度，電流密度，絶対温度，電位を表す．また $\bar{\theta}$, κ, τ_m, τ_e は, それぞれ室温，熱伝導係数, モーメントの緩和時間, エネルギーの緩和時間を表す正定数であり，$\varepsilon := \tau_m^2$, $\lambda := \tau_m\tau_e$ とする．ドーピング・プロファイル $D(x)$ は半導体中に固定されている正のイオンの分布を表す関数であり，ここでは有界連続性と正値性：$0 < c \leq D(x) \in \mathcal{B}^0(\overline{\Omega})$ を仮定する．半導体デバイスは微小であるため，有界領域 $\Omega := (0,1)$ 上で方程式系 (1) に次の境界条件を課した初期値境界値問題を考察する．

$$(\rho, \theta)(0, x) = (\rho_0, \theta_0)(x), \tag{2}$$
$$j(0, x) = j_0(x), \tag{3}$$
$$\rho(t, 0) = \rho_l,\ \rho(t, 1) = \rho_r,\ \theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0,\ \phi(t, 0) = 0,\ \phi(t, 1) = \phi_r. \tag{4}$$

ここで，ρ_l, ρ_r, ϕ_r は正定数である. 方程式 (1d) を解いて，電圧 ϕ を表す公式が得られる．

$$\phi = \Phi[\rho] := \int_0^x\int_0^y (\rho - D)(t, z)\, dzdy + \left(\phi_r - \int_0^1\int_0^y (\rho - D)(t, z)\, dzdy\right) x. \tag{5}$$

本講演では，緩和時間 ε を 0 に近づけたとき，HHD モデルの解が次の Energy-transport model(ET モデル) の解に収束することを示す．

$$\rho_t + j_x = 0, \tag{6a}$$
$$\rho\theta_t + j\theta_x + \frac{2}{3}\left(\frac{j}{\rho}\right)_x \rho\theta - \frac{2}{3}\kappa\theta_{xx} = \frac{2}{3}\frac{(j)^2}{\rho} - \frac{\rho}{\lambda}(\theta - \bar{\theta}), \tag{6b}$$
$$\phi_{xx} = \rho - D. \tag{6c}$$

ここで，電流密度は

$$j = -(\bar{\theta}\rho)_x + \rho\phi_x \tag{6d}$$

であり，ET モデルの初期値と境界値は (2) と (4) で与えられる．

HHD モデルは非線形双曲型方程式を含む為，亜音速条件及び温度と密度の強正値性

$$\inf_{x\in\Omega}\left(\theta-\varepsilon j^2/\rho^2\right)>0,\quad \inf_{x\in\Omega}\rho>0,\quad \inf_{x\in\Omega}\theta>0. \tag{7}$$

を満たし，かつ定常解 $(\tilde\rho,\tilde j,\tilde\theta,\tilde\phi)$ に十分近い初期値に対してのみ時間大域解が構成され，定常解の漸近安定性が証明されていた ([1])．一方，ET モデルでは放物型方程式 2 本と Poisson 方程式の連立系であることから，大きな初期値に対して時間大域解が存在し，その漸近挙動が定常解で与えられることが示される．従って，HHD モデルに $\varepsilon=0$ を代入すれば ET モデルが得られることを考慮すると，大きな初期値に対して緩和時間 ε を十分小くとるならば，HHD モデルの時間大域解が存在することが予想される．この予想を肯定的に解決した本講演の主結果の一つは，以下のようにまとめられる．

定理 1. 初期値 $(\rho_0,j_0,\theta_0)\in H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)\times H^3(\Omega)$ は (7) と両立条件 $\rho_0(0)=\rho_l$, $\rho_0(1)=\rho_r$, $j_{0x}(0)=j_{0x}(1)=0$ を満たすとする．このとき，ある正定数 δ_0 と ε_0 があって，$\delta:=|\rho_l-\rho_r|+|\phi_r|\le\delta_0$ かつ $\varepsilon<\lambda\le\varepsilon_0$ であれば，初期値問題 (1)–(4) に $(\rho-\tilde\rho,j-\tilde j,\theta-\tilde\theta,\phi-\tilde\phi)\in C([0,\infty);H^2)\times C([0,\infty);H^2)\times C([0,\infty);H^3)\times C([0,\infty);H^4)$ と (7) を満たす解 (ρ,j,θ,ϕ) が一意的に存在する．さらに, 次の減衰評価が成立する．

$$\begin{aligned}&\|(\rho-\tilde\rho,\theta-\tilde\theta)(t)\|_2+\|(j-\tilde j)(t)\|_1\\&\qquad+\sqrt{\varepsilon}\|(\partial_x^2\{j-\tilde j\},\partial_x^3\{\theta-\tilde\theta\})(t)\|+\|(\phi-\tilde\phi)(t)\|_4\le Ce^{-\alpha t}.\end{aligned}$$

ここで， C と α は t と ε によらない正定数である．

定理 2. 緩和時間 ε を 0 に近づけると，定理 1 で構成した HHD モデルの時間大域解 $(\rho^\varepsilon,j^\varepsilon,\theta^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ は，ET モデルの時間大域解 $(\rho^0,j^0,\theta^0,\phi^0)$ に収束する．正確には，任意の $t>0$ と $\varepsilon<\lambda\le\varepsilon_0$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$\|(\rho^\varepsilon-\rho^0,\theta^\varepsilon-\theta^0)(t)\|_1^2+\|(\phi^\varepsilon-\phi^0)(t)\|_3^2\le C\varepsilon^\gamma, \tag{8}$$

$$\|(j^\varepsilon-j^0)(t)\|^2\le\|(j^\varepsilon-j^0)(0)\|^2e^{-t/\varepsilon}+C\varepsilon^\gamma, \tag{9}$$

$$\|(\partial_x^2\{\rho^\varepsilon-\rho^0\},\partial_x^2\{\theta^\varepsilon-\theta^0\},\partial_x^1\{j^\varepsilon-j^0\},\partial_x^4\{\phi^\varepsilon-\phi^0\})(t)\|^2\le C\varepsilon^\gamma(t^{-2}+1). \tag{10}$$

ここで，γ 及び C は t と ε には依存しない正定数である．

注意　ET モデルの初期値は ρ_0 と θ_0 だけで与えられ，初期時刻での電流密度は方程式 (6d) と公式 (5) より定まる：$j^0(0,x)=-(\theta_0\rho_0)_x+\rho_0(\Phi[\rho_0])_x(x)$. この $j^0(0,x)$ と HHD モデルに対する初期電流 $j_0(x)$ の差から初期層が生じるが，(9) の右辺第一項はその大きさが指数関数的に減衰することを意味している．

記号　整数 $i\ge0$ について，$H^i(\Omega)$ は Sobolev 空間であり，そのノルムを $\|\cdot\|_i$ と書く．さらに，$\|\cdot\|:=\|\cdot\|_0$ とする．

参考文献

[1] S. Nishibata and M. Suzuki, Asymptotic stability of a stationary solution to a thermal hydrodynamic model for semiconductors, to appear in *Arch. Ration. Mech. Anal.*.