

気体放電を記述する Morrow モデル II：大域分岐解析

鈴木 政尋 (名古屋工業大学 大学院情報理工学研究科)

Walter Strauss (Brown University, Department of Mathematics)

本講演では、気体放電を記述する Morrow モデルの境界値問題を論じる。この問題は、正イオン密度および電子密度が零となる自明解を持つが、非自明解の大域分岐を考察する。一次元有界区間 $I := (0, L)$ において、定常 Morrow モデルは次の連立方程式系で与えられる。(このモデルの詳細は、[1] を参照のこと。)

$$\partial_x(\rho_i u_i) = \alpha(\partial_x \Phi) \rho_e |v_e|, \quad (1a)$$

$$\partial_x(\rho_e v_e) - k_e \partial_{xx} \rho_e = \alpha(\partial_x \Phi) \rho_e |v_e|, \quad (1b)$$

$$\partial_{xx} \Phi = \rho_i - \rho_e, \quad x \in I. \quad (1c)$$

未知関数 $\rho_i, \rho_e, -\Phi$ は、それぞれ正イオン密度、電子密度、電位を表す。また、 u_i および v_e は、それぞれ正イオンと電子のドリフト電流であり、 $\alpha(\partial_x \Phi)$ は Townsend の一次電離係数である。すなわち、次で与えられる。

$$u_i := k_i \partial_x \Phi, \quad v_e := -k_e \partial_x \Phi, \quad \alpha(\partial_x \Phi) := a \exp(-b|\partial_x \Phi|^{-1}).$$

ここで、 k_i, k_e, a, b は正定数である。境界値は次のように課す。

$$\rho_i(0) = \rho_e(0) = \Phi(0) = 0, \quad \rho_e(L) = 0, \quad \Phi(L) = V_c. \quad (1d)$$

なお、 V_c は正定数であり、境界 $x = 0$ が陽極、境界 $x = L$ が陰極を表す。この境界値問題 (1) は、次の自明解を持つ。

$$(\rho_i, \rho_e, \Phi) = (0, 0, V_c x/L).$$

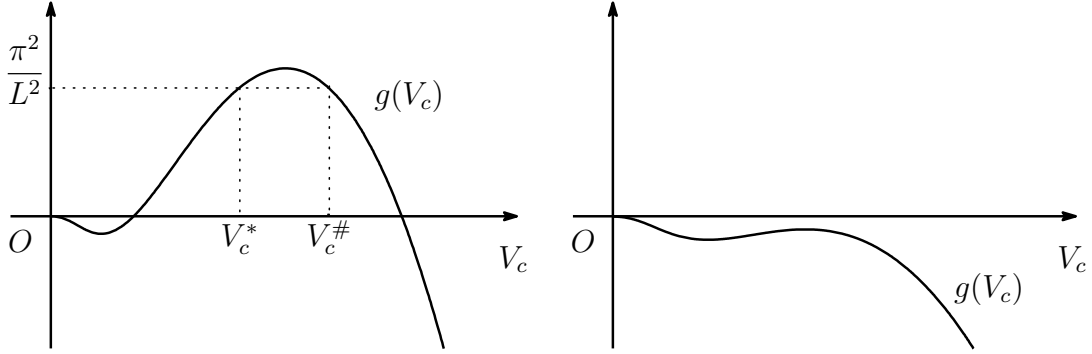
1900 年頃、Townsend は放電発生に関する理論を発表した。彼は、気体を詰めたチューブに高電圧を印可した実験を行い、放電が発生するために不可欠な二つの作用を発見している。一つは、電子が中性粒子と衝突することにより、新たに電子と正イオンが生じる α 作用である。もう一つは γ 作用と呼ばれ、正イオンが陰極と衝突した際に起こる、電子の二次放出である。さらに、彼は、時間を離散化させるなどして、放電が発生し持続するための電圧の閾値 (火花電圧) を導出した。Townsend 理論において注目すべきことは、 α 作用、 γ 作用のどちらか一方を欠いても、火花電圧を得ることができず、放電が持続しない点にある。

近年、Morrow により方程式系 (1a)–(1c) が提案され、放電現象の数値実験に広く利用されている。研究 [3] では、この方程式系を用いて火花電圧を再導出している。具体的には、 α 作用のみを考慮した場合を考察し、自明解 $(\rho_i, \rho_e, \Phi) = (0, 0, V_c x/L)$ が時間的に安定から不安定へと変化する臨界電圧を、Morrow モデルの火花電圧 V_c^* と結論づけた。さらに、[3] では、 $V_c = V_c^*$ において非自明解が分岐することも示されている。ただし、この結果では局所分岐のみを扱っている。本講演では、非自明解の大域分岐を解析する。

主結果を述べるため、記号を準備する。まず、関数 g を次で定義する。

$$g(\lambda L) := \lambda \alpha(\lambda) - \frac{\lambda^2}{4}, \quad \lambda > 0.$$

物理パラメータの選び方に依り、 g のグラフは次の左図または右図のようになる。



研究 [3] では、左図の場合において火花電圧 V_c^* を定めている。ここでも左図の場合を考え、さらに反火花電圧 $V_c^\#$ を定義する。

$$g(V_c^*) = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad g'(V_c^*) > 0, \quad g(V_c^\#) = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad g'(V_c^\#) < 0.$$

関数空間 X と集合 $\mathcal{O} \subset (0, \infty) \times X$ を次で定義する。

$$X : \rho_i \in \{f \in C^1([0, L]); f(0) = 0\}, \quad \rho_e \in \{f \in C^2([0, L]); f(0) = f(L) = 0\},$$

$$V \in \{f \in C^3([0, L]); f(0) = f(L) = 0\},$$

$$\mathcal{O} := \{(V_c, \rho_i, \rho_e, V) \in (0, \infty) \times X; \partial_x V + V_c/L > 0\}.$$

定理 1 ([2]). 集合 \mathcal{O} 内に連続曲線 $\mathcal{K} = \{(V_c(s), \rho_i(s), \rho_e(s), V(s)); s \in \mathbb{R}\}$ が存在して、次の (i)–(iv) が成り立つ。

- (i) $(\rho_i(s), \rho_e(s), V(s) + V_c(s)x/L)$ は境界値問題 (1) の古典解である。
- (ii) $(V_c(0), \rho_i(0), \rho_e(0), V(0)) = (V_c^*, 0, 0, 0)$.
- (iii) $s < 0$ かつ $|s| \ll 1$ ならば、任意の $x \in I$ に対して $\rho_i(s, x), \rho_e(s, x)$ は負値。
- (iv) 下記の [A] または [B] のどちらかが起こる。

[A] 任意の $s \in (0, \infty)$ および $x \in I$ に対して、 $\rho_i(s, x), \rho_e(s, x)$ は正値であり、 $\limsup_{s \rightarrow 0} \|(\rho_i, \rho_e)(s)\|_{C^0} = \infty$.

[B] ある $T^\# > 0$ が存在して、次が成り立つ。

- 任意の $s \in (0, T^\#)$ および $x \in I$ に対して、 $\rho_i(s, x), \rho_e(s, x)$ は正値。
- $(V_c(T^\#), \rho_i(T^\#), \rho_e(T^\#), V(T^\#)) = (V_c^\#, 0, 0, 0)$.
- $0 < s - T^\# \ll 1$ ならば、任意の $x \in I$ に対して $\rho_i(s, x), \rho_e(s, x)$ は負値。

参考文献

- [1] R. Morrow, *Theory of negative corona in oxygen*, Phys. Rev. A **32** (1985), 1799–1809.
- [2] W. A. Strauss and M. Suzuki, *Large amplitude stationary solutions of the Morrow model of gas ionization*, Kinetic and Related Models **12** (2019), 1297–1312.
- [3] M. Suzuki and A. Tani, *Bifurcation analysis of the Degond–Lucquin–Desreux–Morrow model for gas discharge*, to appear in J. Differential Equations.