# 気体放電を記述する方程式の大域分岐解析

鈴木 政尋　(名古屋工業大学 大学院工学研究科)
Walter Strauss　(Brown University, Department of Mathematics)

本講演では, 気体放電を記述する Morrow モデルの境界値問題を論じる. この問題は, 正イオン密度および電子密度が零となる自明解を持つが, 非自明解の大域分岐を考察する. 一次元有界区間 $I := (0, L)$ において, 定常 Morrow モデルは次の連立方程式系で与えられる. (このモデルの詳細は, [1] を参照のこと.)

$$\partial_x(\rho_i u_i) = \alpha(\partial_x \Phi)\rho_e |v_e|, \tag{1a}$$

$$\partial_x(\rho_e v_e) - k_e \partial_{xx}\rho_e = \alpha(\partial_x \Phi)\rho_e |v_e|, \tag{1b}$$

$$\partial_{xx}\Phi = \rho_i - \rho_e, \quad x \in I. \tag{1c}$$

未知関数 $\rho_i$, $\rho_e$, $-\Phi$ は, それぞれ正イオン密度, 電子密度, 電位を表す. また, $u_i$ および $v_e$ は, それぞれ正イオンと電子のドリフト電流であり, $\alpha(\partial_x\Phi)$ は Townsend の一次電離係数である. すなわち, 次で与えられる.

$$u_i := k_i \partial_x \Phi, \quad v_e := -k_e \partial_x \Phi, \quad \alpha(\partial_x \Phi) := a \exp\left(-b|\partial_x \Phi|^{-1}\right).$$

ここで, $k_i$, $k_e$, $a$, $b$ は正定数である. 境界値は次のように課す.

$$\rho_i(0) = \rho_e(0) = \Phi(0) = 0, \quad (\rho_e v_e - k_e \partial_x \rho_e)(L) = -\gamma \rho_i u_i(L), \quad \Phi(L) = V_c. \tag{1d}$$

なお, $V_c$ は正定数であり, 境界 $x = 0$ が陽極, 境界 $x = L$ が陰極を表す. また, 正定数 $\gamma$ は Townsend の二次電離係数である. この境界値問題 (1) は, 次の自明解を持つ.

$$(\rho_i, \rho_e, \Phi) = (0, 0, V_c x/L).$$

1900 年頃, Townsend は放電発生に関する理論を発表した. 彼は, 気体を詰めたチューブに高電圧を印可した実験を行い, 放電が発生するために不可欠な二つの作用を発見している. 一つは, 電子が中性粒子と衝突することにより, 新たに電子と正イオンが生じる $\alpha$ 作用である. もう一つは $\gamma$ 作用と呼ばれ, 正イオンが陰極と衝突した際に起こる, 電子の二次放出である. さらに, 彼は, 時間を離散化させるなどして, 放電が発生し持続するための電圧の閾値 (火花電圧) を導出した. Townsend 理論において注目すべきことは, $\alpha$ 作用, $\gamma$ 作用のどちらか一方を欠いても, 火花電圧を得ることができず, 放電が持続しない点にある.

近年, Morrow により方程式系 (1a)–(1c) が提案され, 放電現象の数値実験に広く利用されている. 研究 [4] では, この方程式系を用いて火花電圧を再導出している. 具体的には, $\alpha$ 作用のみを考慮した場合を考察し, 自明解 $(\rho_i, \rho_e, \Phi) = (0, 0, V_c x/L)$ が時間的に安定から不安定へと変化する臨界電圧を, Morrow モデルの火花電圧 $V_c^*$ と結論づけた. さらに, [2, 4] では, $V_c = V_c^*$ において非自明解が分岐することが示されている. 本講演では, $\alpha$ 作用と $\gamma$ 作用の両方を考慮し, 非自明解の大域分岐を解析する.

主結果を述べるため, 火花関数 $D(V_c)$ を定義する.

$$D(V_c)=\frac{1}{2}\left(e^{\mu}+e^{-\mu}\right)+\frac{V_c}{4\mu}\left(e^{\mu}-e^{-\mu}\right)-\frac{\gamma}{1+\gamma}e^{\frac{V_c}{2}},\quad V_c\in(0,\infty).$$

ここで, $\mu$ は次の通りである.

$$\mu(V_c):=L\sqrt{-g(V_c)},\quad g(V_c):=\frac{V_c}{L}\alpha\left(\frac{V_c}{L}\right)-\frac{V_c^2}{4L^2}.$$

この火花関数 $D$ の最小の根を火花電圧 $V_c^{\dagger}$ と呼ぶ. 当然, $D(V_c)$ は物理パラメータ $(a,b,\gamma)$ に依り, 正確には $D(V_c)=D(V_c,a,b,\gamma)$ である. 集合 $A$ を次で定める.

$$A=\{(a,b,\gamma)\in(\mathbb{R}_+)^3\ ;\ D(V_c)=D(V_c,a,b,\gamma)\text{ は根を持つ }\}.$$

なお, $A\neq(\mathbb{R}_+)^3$ であり, $A^{\circ}$ は空集合ではない. 関数 $D$ が複数の根を持つ場合は, 火花電圧 $V_c^{\dagger}$ より真に大きい根を反火花電圧 $V_c^{\ddagger}$ と呼ぶ. 関数空間 $X$ と集合 $\mathcal{O}\subset(0,\infty)\times X$ を次で定める.

$$\begin{aligned}&X:\rho_i\in\{f\in C^1([0,L]);f(0)=0\},\quad \rho_e\in\{f\in C^2([0,L]);f(0)=0\},\\&\qquad V\in\{f\in C^3([0,L]);f(0)=f(L)=0\},\\&\mathcal{O}:=\{(V_c,\rho_i,\rho_e,V)\in(0,\infty)\times X;\ \partial_xV+V_c/L>0\}.\end{aligned}$$

**定理 1** ([3])**.** ほとんどすべての $(a,b,\gamma)\in A^{\circ}$ に対して, 集合 $\mathcal{O}$ 内に連続曲線 $\mathcal{K}=\{(V_c(s),\rho_i(s),\rho_e(s),V(s));s\in\mathbb{R}\}$ が存在して, 次の (i)–(iv) が成り立つ.

(i) $(\rho_i(s),\rho_e(s),V(s)+V_c(s)x/L)$ は境界値問題 (1) の古典解である.

(ii) $(V_c(0),\rho_i(0),\rho_e(0),V(0))=(V_c^{\dagger},0,0,0)$.

(iii) $s<0$ かつ $|s|\ll 1$ ならば, 任意の $x\in I$ に対して $\rho_i(s,x)$, $\rho_e(s,x)$ は負値.

(iv) 下記の [A] または [B] のどちらかが起こる.

[A] 任意の $s\in(0,\infty)$ および $x\in I$ に対して, $\rho_i(s,x)$, $\rho_e(s,x)$ は正値であり, $\limsup_{s\to 0}\{\|\rho_i(s)\|_{C^0}+\|\rho_e(s)\|_{C^0}+|V_c(s)|\}=\infty$.

[B] ある $s^{\ddagger}>0$ が存在して, 次が成り立つ.

- 任意の $s\in(0,s^{\ddagger})$ および $x\in I$ に対して, $\rho_i(s,x)$, $\rho_e(s,x)$ は正値.
- $(V_c(s^{\ddagger}),\rho_i(s^{\ddagger}),\rho_e(s^{\ddagger}),V(s^{\ddagger}))=(V_c^{\ddagger},0,0,0)$.
- $0<s-s^{\ddagger}\ll 1$ ならば, 任意の $x\in I$ に対して $\rho_i(s,x)$, $\rho_e(s,x)$ は負値.

## 参考文献


[1] R. Morrow, *Theory of negative corona in oxygen*, Phys. Rev. A **32** (1985), 1799–1809.

[2] W. A. Strauss and M. Suzuki, *Large amplitude stationary solutions of the Morrow model of gas ionization*, Kinetic and Related Models **12** (2019), 1297–1312.

[3] W. A. Strauss and M. Suzuki, *Steady States of Gas Ionization with Secondary Emission*, Methods and Applications of Analysis, in press.

[4] M. Suzuki and A. Tani, *Bifurcation analysis of the Degond–Lucquin-Desreux–Morrow model for gas discharge*, J. Differential Equations **268** (2020), 4733–4755.