

気体放電を記述する Morrow モデル I：安定解析

鈴木 政尋 (名古屋工業大学 大学院情報理工学研究科)
谷 温之 (慶應義塾大学 理工学部)

本講演では, 気体放電を記述する Morrow モデルの初期値境界値問題を論じる. この問題は, 正イオン密度および電子密度が零となる自明定常解を持つが, その自明解の安定性・不安定性について考察する. 一次元有界区間 $I := (0, L)$ において, Morrow モデルは次の双曲型・放物型・楕円型連立方程式系で与えられる. (モデルの詳細は, [1] を参照のこと.)

$$\partial_t \rho_i + \partial_x(\rho_i u_i) = \alpha(\partial_x \Phi) \rho_e |v_e|, \quad (1a)$$

$$\partial_t \rho_e + \partial_x(\rho_e v_e) - k_e \partial_{xx} \rho_e = \alpha(\partial_x \Phi) \rho_e |v_e|, \quad (1b)$$

$$\partial_{xx} \Phi = \rho_i - \rho_e, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times I. \quad (1c)$$

未知関数 $\rho_i, \rho_e, -\Phi$ は, それぞれ正イオン密度, 電子密度, 電位を表す. また, u_i および v_e は, それぞれ正イオンと電子のドリフト電流であり, $\alpha(\partial_x \Phi)$ は Townsend の一次電離係数である. すなわち, 次で与えられる.

$$u_i := k_i \partial_x \Phi, \quad v_e := -k_e \partial_x \Phi, \quad \alpha(\partial_x \Phi) := a \exp(-b|\partial_x \Phi|^{-1}).$$

ここで, k_i, k_e, a, b は正定数である. 初期値および境界値は次のように課す.

$$(\rho_i, \rho_e)(0, x) = (\rho_{i0}, \rho_{e0})(x), \quad \rho_{i0}(x) \geq 0, \quad \rho_{e0}(x) \geq 0, \quad (1d)$$

$$\rho_i(t, 0) = \rho_e(t, 0) = \Phi(t, 0) = 0, \quad \rho_e(t, L) = 0, \quad \Phi(t, L) = V_c. \quad (1e)$$

なお, V_c は正定数であり, 境界 $x = 0$ が陽極, 境界 $x = L$ が陰極を表す. この初期値境界値問題 (1) は, 次の自明な定常解を持つ.

$$(\rho_i, \rho_e, \Phi) = (0, 0, V_c x/L).$$

1900 年頃, Townsend は放電発生に関する理論を発表した. 彼は, 気体を詰めたチューブに高電圧を印可した実験を行い, 放電が発生するために不可欠な二つの作用を発見した. 一つは, 電子が中性粒子と衝突することにより, 新たに電子と正イオンが生じる α 作用である. もう一つは γ 作用と呼ばれ, 正イオンが陰極と衝突した際に起こる, 電子の二次放出である. さらに, 彼は, 時間を離散化させるなどして, 放電が発生し持続するための電圧の閾値 (火花電圧) を導出した. Townsend 理論において注目すべきことは, α 作用, γ 作用のどちらか一方を欠いても, 火花電圧を得ることができず, 放電が持続しない点にある. 近年, Morrow により方程式系 (1a)–(1c) が提案され, 放電現象の数値実験に広く利用されている. 本研究の目的は, Morrow モデルを用いて火花電圧を再導出することにある.

本講演では, α 作用は考慮するが, γ 作用を考慮しない場合を解析する. 具体的には, 方程式 (1a), (1b) の右辺が α 作用を表している. また, γ 作用は境界条件と

して取り込むべきであるが, 境界条件 (1e) では $\rho_e(t, L) = 0$ とし, 電子の二次放出は起きないとしている. この状況において, 自明定常解の安定性を調べる. 自明解が時間的に安定であれば, 放電は持続しないと言える. 実際, 時間経過にともない電子密度は零に収束し, チューブ内に電流が流れない状況に対応する. 逆に, 自明解が不安定であれば, 放電は持続する. したがって, 電圧をパラメータとみなして自明定常解が時間的に安定から不安定へと変化する臨界電圧を, Morrow モデルの火花電圧と定めるのが妥当であろう. 主結果を述べるために, 関数 g を定義する.

$$g(\lambda L) := \lambda \alpha(\lambda) - \frac{\lambda^2}{4}, \quad \lambda > 0.$$

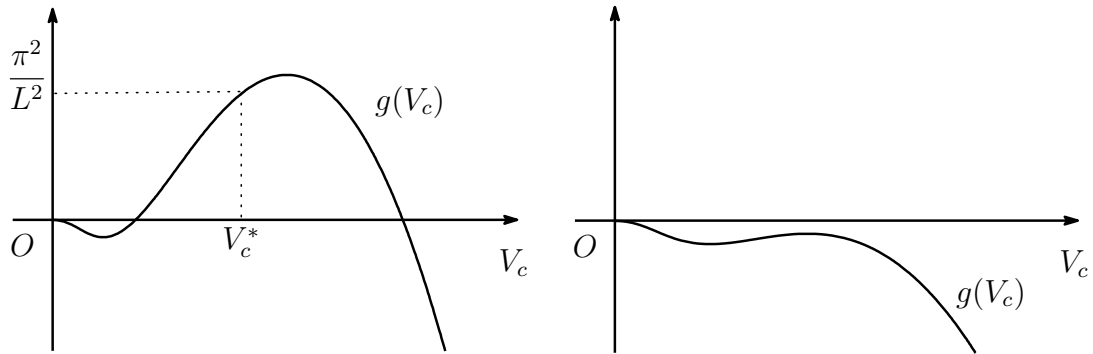
定理 1 ([2]). 電圧 V_c は $g(V_c) < \pi^2/L^2$ を, 初期値 $(\rho_{i0}, \rho_{e0}) \in H^1(I)$ は両立条件をそれぞれ満たすとする. このとき, ある正定数 ε_0 が存在して, $\|(\rho_{i0}, \rho_{e0})\|_{H^1} \leq \varepsilon_0$ ならば, 初期値境界値問題 (1) は唯一の強解 (ρ_i, ρ_e, ϕ) を時間大域的に持ち, その解は時間経過とともに自明定常解へ $H^1(I)$ の位相で収束する.

定理 2 ([2]). 電圧 V_c は $g(V_c) > \pi^2/L^2$ を満たし, 初期値は $(\rho_{i0}, \rho_{e0}) = (\delta\psi_i, \delta\psi_e)$ で与えられるとする. ここで, δ は正定数であり, (ψ_i, ψ_e) は両立条件と次を満たす.

$$\psi_i(x), \psi_e(x) \geq 0, \quad \int_0^L \psi_e(x) dx > 0, \quad \|\psi_i\|_{H^1} + \|\psi_e\|_{H^1} = 1.$$

このとき, 次を満たす正定数 ε_0 が存在する. 十分小さな任意の $\delta > 0$ に対して, ある時刻 $T > 0$ があって, 強解 (ρ_i, ρ_e, ϕ) は, $\|\rho_i(T)\|_{H^1} + \|\rho_e(T)\|_{H^1} \geq \varepsilon_0$ となる.

物理パラメータの選び方に依り, g のグラフは次の左図または右図のようになる.



左図の場合において火花電圧 V_c^* は, 次を満たす値で定められる.

$$g(V_c^*) = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad g'(V_c^*) > 0.$$

実際, 定理 1 および定理 2 より, 電圧 V_c が火花電圧 V_c^* を超えるとき, 自明解は安定から不安定へと変化する. したがって, Townsend 理論と違い, Morrow モデルでは γ 作用を考慮しなくとも, 放電が持続する状況があると結論づけられる.

参考文献

- [1] R. Morrow, *Theory of negative corona in oxygen*, Phys. Rev. A **32** (1985), 1799–1809.
- [2] M. Suzuki and A. Tani, *Bifurcation analysis of the Degond–Lucquin–Desreux–Morrow model for gas discharge*, to appear in J. Differential Equations.