半導体の熱伝導流体力学モデルの時間大域解の挙動

鈴木 政尋　(東京工業大学情報理工学研究科)
西畑 伸也　(東京工業大学情報理工学研究科)

半導体中の電子流を記述する，熱伝導を考慮した流体力学モデルに対する初期値境界値問題について議論する．半導体は微小なデバイスであり，その解析は境界の影響を考慮して有界領域でなされる必要がある．本講演では，一次元有界領域 $\Omega := (0,1)$ 上で初期値境界値問題の定常解の一意存在と漸近安定性を示す．半導体中の電子流は次の方程式系で表される．

$$\rho_t + j_x = 0, \tag{1a}$$

$$j_t + \left(\frac{j^2}{\rho} + p(\rho,\theta)\right)_x = \rho\phi_x - \frac{j}{\tau_1}, \tag{1b}$$

$$\rho\theta_t + j\theta_x + \frac{2}{3}\left(\frac{j}{\rho}\right)_x \rho\theta - \frac{2}{3}(\kappa\theta_x)_x = \nu\frac{j^2}{\rho} - \frac{\rho}{\tau_2}(\theta-\bar{\theta}), \tag{1c}$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \tag{1d}$$

ここで，ρ, j, θ, ϕ はそれぞれ，電子密度，電流密度，絶対温度，電位を表す未知関数である．また，$\bar{\theta}$, κ, τ_1, τ_2 は, それぞれ室温，熱伝導係数, モーメントの緩和時間，エネルギーの緩和時間を表す正定数とする．さらに, $\nu := (2\tau_2 - \tau_1)/\tau_1\tau_2$ である. 圧力はボイル–シャルルの法則に従い，$p(\rho,\theta) := \theta\rho$ とする．ドーピング・プロファイル $D(x) \in \mathcal{B}^0(\overline{\Omega})$ は半導体中に固定されている正イオンの分布を表すもので，正値関数である: $D(x) \geq c > 0$．初期値と境界値については次のようにおく．

$$(\rho, j, \theta)(0,x) = (\rho_0, j_0, \theta_0)(x), \tag{2}$$

$$\rho(t,0) = \rho_l > 0, \quad \rho(t,1) = \rho_r > 0, \tag{3}$$

$$\theta(t,0) = \theta_l > 0, \quad \theta(t,1) = \theta_r > 0, \tag{4}$$

$$\phi(t,0) = 0, \quad \phi(t,1) = \phi_r > 0. \tag{5}$$

ここで，ρ_l, ρ_r, θ_l, θ_r, ϕ_r は定数である. この初期値境界値問題の古典解を考える為，$x=0$ と $x=1$ で両立条件が成り立つとする．すなわち，$\rho_0(0)=\rho_l$, $\rho_0(1)=\rho_r$, $\theta_0(0)=\theta_l$, $\theta_0(1)=\theta_r$, $j_{0x}(0)=j_{0x}(1)=0$. 初期値に対しては，亜音速条件及び，密度と温度の正値性を仮定する．

$$\inf_{x\in\Omega}\left(\theta_0 - j_0^2/\rho_0^2\right)(x) > 0, \quad \inf_{x\in\Omega}\rho_0(x) > 0, \quad \inf_{x\in\Omega}\theta_0(x) > 0. \tag{6}$$

以上の条件下で，初期値境界値問題 (1)–(5) は well–posed となり，初期値 (ρ_0, j_0, θ_0) の近傍で時間局所解 (ρ, j, θ, ϕ) が一意的に存在し，やはり亜音速条件及び，密度と温度の強正値性を満たす．

$$\inf_{x\in\Omega}\left(\theta - j^2/\rho^2\right) > 0, \quad \inf_{x\in\Omega}\rho > 0, \quad \inf_{x\in\Omega}\theta > 0. \tag{7}$$

この解 (ρ, j, θ, ϕ) が時間大域的に延長でき，漸近挙動が定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ で与えられることを示す．定常解とは，境界条件 (3)–(5) を満たす方程式系 (1) の時間に独立な解を意味する．

$$\tilde{j}_x = 0, \tag{8a}$$

$$\left(\tilde{\theta} - \tilde{j}^2/\tilde{\rho}^2\right)\tilde{\rho}_x + \tilde{\rho}\tilde{\theta}_x = \tilde{\rho}\tilde{\phi}_x - \tilde{j}/\tau_1, \tag{8b}$$

$$\tilde{j}\tilde{\theta}_x + \frac{2}{3}\left(\frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}}\right)_x \tilde{\rho}\tilde{\theta} - \frac{2}{3}\kappa\tilde{\theta}_{xx} = \nu\frac{\tilde{j}^2}{\tilde{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{\tau_2}(\tilde{\theta} - \bar{\theta}), \tag{8c}$$

$$\tilde{\phi}_{xx} = \tilde{\rho} - D. \tag{8d}$$

安定した半導体デバイスを設計する為には，デバイスの温度を制御することが工学的に極めて重要となる．しかし残念ながら，物理的に意味のある設定下での注目すべき数学的な研究結果は報告されておらず，モデル (1) の解析が求められていた．なお，熱伝導を含まない流体力学モデルについては，亜音速条件を満たす領域上において，既に定常解の漸近安定性は示されている ([1, 2])．

定理 1. 境界条件は (3)–(5) を満たすとする．このとき，ある正の定数 ε_1 が存在して，$\delta := |\rho_l - \rho_r| + |\phi_r| + |\theta_l - \bar{\theta}| + |\theta_r - \bar{\theta}| \leq \varepsilon_1$ であれば, 定常問題 (3)–(5), (7), (8) を満たす定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{B}^2(\overline{\Omega})$ が一意的に存在する．

定理 2. 初期値 $(\rho_0, j_0, \theta_0) \in H^2(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, θ_l, θ_r, ϕ_r は (3)–(5), (6) と両立条件を満たすとする．このとき，ある正定数 ε_2 があって，$\delta + \|(\rho_0 - \tilde{\rho}, j_0 - \tilde{j}, \theta_0 - \tilde{\theta})\|_2 \leq \varepsilon_2$ であれば，初期値問題 (1)–(5) に解 (ρ, j, θ, ϕ) が一意的に存在し，$(\rho - \tilde{\rho}, j - \tilde{j}, \theta - \tilde{\theta}, \phi - \tilde{\phi}) \in \mathfrak{X}_2^0([0,\infty)) \times \mathfrak{X}_1^1([0,\infty)) \times \mathfrak{Y}([0,\infty)) \cap H^1(0,\infty : H^1) \times \mathfrak{X}_2^2([0,\infty))$ を満たす．さらに, 次の減衰評価が成立する．

$$\|(\rho - \tilde{\rho}, j - \tilde{j}, \theta - \tilde{\theta})(t)\|_2 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_4 \leq C\|(\rho_0 - \tilde{\rho}, j_0 - \tilde{j}, \theta_0 - \tilde{\theta})\|_2 e^{-\alpha t},$$

ここで，　C と α は t によらない正定数である．

注意　これらの定理では，δ が十分に小さいことが仮定されているが，物理的観点からは $\rho_l = \rho_r$, $\theta_l = \theta_r = \bar{\theta}$ が自然であり，また実際に半導体にかかる電圧 ϕ_r は非常に小さい値である為，この仮定は物理的に妥当である．

記号　非負の定数 $i \geq 0$ に対して, $H^i(\Omega)$ は i 次の Sobolev 空間とし，そのノルムを $\|\cdot\|_i$ とする．さらに，$\|\cdot\| := \|\cdot\|_0$．$\mathcal{B}^k(\Omega)$ は i 次の Höledr 空間とする．また，非負定数 $i, j \geq 0$ に対し，関数空間を以下のように定義する．

$$\mathfrak{X}_i^j([0,T]) := \bigcap_{k=0}^{i} C^k([0,T]; H^{j+i-k}(\Omega)), \quad \mathfrak{Y}([0,T]) := \bigcap_{k=0}^{1} C^k([0,T]; H^{2-2k}(\Omega)).$$

参考文献

[1] Y. Guo and W. Strauss, Stability of semiconductor states with insulating and contact boundary conditions, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **179** (2006), 1–30.

[2] S. Nishibata and M. Suzuki, Asymptotic stability of a stationary solution to a hydrodynamic model of semiconductors, to appear in *Osaka J. Math.*.