プラズマ境界層の数学解析

鈴木 政尋　(名古屋工業大学)*

1. 序

プラズマが接触する物体の周囲にはシースと呼ばれる境界層が形成される．本講演では，その形成を数学的に解析した成果を論じる．プラズマ中の正イオンの運動は，次の Euler–Poisson 方程式で記述される．

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{1a}$$

$$(\rho \boldsymbol{u})_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + K\nabla\rho = \rho\nabla\phi, \tag{1b}$$

$$\varepsilon\Delta\phi = \rho - e^{-\phi}. \tag{1c}$$

未知関数 $\rho = \rho(t,x)$, $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3) = (u_1,u_2,u_3)(t,x)$, $-\phi = -\phi(t,x)$ はそれぞれ正イオン密度，正イオン速度，電位を表す．正定数 K, $\sqrt{\varepsilon}$ は，それぞれ正イオン温度と Debye 長を表す．方程式 (1c) は電磁気学における Poisson 方程式であるが，電子密度 ρ_e は Boltzmann の関係式 $\rho_e = e^{-\phi}$ に従うとしている．この仮定は物理的だけでなく数学的にも妥当であることが，Grenier–Guo–Pausader–Suzuki により示されている [9]．

人工的につくられるプラズマは，核融合，半導体デバイス用シリコンウェハーの微細加工，空気清浄・浄水，殺菌などに広く利用されている．こうした用途では，プラズマが金属やシリコンなどに接触する周囲に境界層（シース, sheath）が現れ，その解析はプラズマ物理学・工学において重要とされている．シースが形成されるメカニズムを詳述する．プラズマが固定壁に接触するとき，プラズマ中の電子と正イオンは壁に流れ込むが，電子は正イオンに比べて遥かに軽く動きやすいため，過剰に吸収される．すなわち，壁の付近では電子密度は正イオン密度より急激に減少し，壁とプラズマの間に電気的な偏りが生じる．この偏りが生じた領域がシースである．また，シースの厚みは Debye 長 $\sqrt{\varepsilon}$（プラズマ中に荷電粒子をおいたとき，荷電粒子から生じる電場が遮蔽される距離）の数倍程度になることが知られている．これらについては，参考文献 [5, 16] により詳しい解説がある．

1920 年代頃からシースは研究されており，シースが形成されるためには，正イオンはある一定の速度以上でシース領域に流れ込まなければならないことが，Langmuir により指摘された [15]．その後，Bohm は定常 Euler–Poisson 方程式を用いて，平らな固定壁に対して垂直な一方向流を考察し，正イオン速度は $\sqrt{\kappa(T_e+T_i)/m_i}$ に達する必要があることを明らかにした [4]．ここで，κ は Boltzmann 定数，T_e は電子温度，T_i は正イオン温度，m_i は正イオン質量を表す．この条件は，Bohm 条件と呼ばれている．Bohm 条件に関する一連の物理的な研究成果は，参考文献 [18] で概説されている．

方程式系 (1) は適切に無次元化が行われており，この系では Bohm 条件は次となる．

$$u_+^2 > K+1, \quad u_+ < 0. \tag{2}$$

本研究は科研費 (課題番号:23740111, 26800067, 18K03364, 21K03308) の助成を受けたものである．

* 〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町 名古屋工業大学 ながれ領域
e-mail: masahiro@nitech.ac.jp
web: http://suzuki.web.nitech.ac.jp/

ここで，u_+ は固定壁に対して垂直方向の正イオン速度を表す．方程式系 (1) を用いて，シース形成およびBohm条件を議論した数学的な成果は数多く報告されている．シースは定常的な境界層と観測されるため，数学的には方程式系 (1) の定常解に対応し，それは時間的に安定であると予想できる．実際，Ambroso–Méhats–Raviart は，Bohm条件を仮定して区間 $(0,1)$ 上で単調な定常解の存在を示し [2]，Ambroso は時間発展問題の解は時間経過とともに [2] で構成された定常解に収束することを数値的に確認している [1]．さらに，Suzuki は半空間において平面定常解が存在するための必要十分条件を導き，Bohm条件 (2) よりやや強い条件を仮定して定常解の安定性を証明している [19]．その後，Nishibata–Ohnawa–Suzuki の研究 [17] において [19] の安定性定理が改善され，Bohm条件下で定常解の安定性が示されている．これらの研究により，Bohm条件は定常解が一意的に存在して時間的に安定であるための十分条件であることが解明されている．また，[17] で行われているスペクトル解析より，Bohm条件は安定性のための必要条件であると推察される．

上述の研究では，平らな固定壁のみを扱っているが，固定壁が曲がっている場合に，Bohm条件がどのように変化するのかを考察することは，より興味深い．Jung–Kwon–Suzuki は，三次元円環領域において球面対称定常解を議論し，その存在にはBohm条件より真に強い条件が必要となることを示している [12]．また，摂動半空間において，Bohm条件とある必要条件が定常解の存在を保証することが解明されている [20]．

定常解の存在および安定性を議論した成果 [12, 17, 19, 20] では，シース領域の解析に注力するため，長さスケールをDebye長 $\sqrt{\varepsilon}$ にとり方程式系 (1) を [1]無次元化している．シースの厚みがDebye長の数倍であることを解明するには，より大きな長さスケールを用いて解析すべきである．そのようなスケールにおいて，Gérard-Varet–Han-Kwan–Rousset は，Debye長が十分小さければ，半空間上の方程式系 (1) の時間局所解は外部解と内部解の和で近似できることを示している [8]．ここで，外部解とは，方程式系 (1) でDebye長を零とした極限方程式の解である．内部解とは，長さスケールをDebye長に取り直した方程式系において，Debye長を零とした境界層方程式の解であり，境界層の発展過程を表現する．実際，形式的に時間変数を無限大とすれば，内部解は先述の定常解に収束する．また，内部解の挙動から，直ちにシースの厚みが分かる．

曲がった境界を持つ領域においてシースの厚みを分析することも興味深く，Jung–Kwon–Suzuki は，三次元円環領域において Gérard-Varet 等と同様な結果を証明している [14, 13]．ただし，円環領域では境界が2つあるため，内部解をより精密に構成する必要がある．こうした研究では，[2]Debye長 $\sqrt{\varepsilon}$ の小ささを仮定するが，その値は典型的に $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 程度であり，これは妥当な仮定である．また，Debye長を零とする極限は準中性極限と呼ばれる．これは，方程式 (1c) において $\varepsilon = 0$ とすると正イオン密度 ρ と電子密度 $e^{-\phi}$ が等しくなり，電気的に中性な状態が成立することに由来する．

プラズマ境界層の数学解析とは直接的に関係しないが，全空間における Euler–Poisson 方程式の研究成果をいくつか紹介する．Guo–Pausader は，初期速度に渦がない場合に時間大域可解性を証明している [10]．Cordier–Grenier は時間局所解の準中性極限を解析している [6]．また，Cordier–Degond–Markowich–Schmeiser は進行波解の存在を示し，その準中性極限を取り扱っている [7]．さらに，進行波解のうち孤立波解については，Haragus–Scheel[11] や Bea–Kwon[3] によって，その性質が深く解析されている．

---

[1] この無次元化により $\varepsilon = 1$ となるが，Bohm条件 (2) は変化しない．

[2] 長さスケールを1メートルとして無次元化されている．

本講演では，定常解に関する結果 [2, 12, 17, 19, 20] 及び，準中性極限に関する結果 [8, 14, 13] を概説し，固定壁（領域の境界）の形状に応じて Bohm 条件とシースの厚みがどのように変化するかを論じる．この要旨では，第 2 章で摂動半空間における定常解の結果 [20] を，第 3 章で三次元円環領域における準中性極限の結果 [14, 13] を詳述する．以下，$L^2(\Omega)$ は通常の Lebesgue 空間を，$H^k(\Omega)$ は k 次の Sobolev 空間を表す．

2. 摂動半空間における定常解

方程式系 (1) において長さスケールを Debye 長 $\sqrt{\varepsilon}$ に取り直し，(1b) を密度 ρ で割れば，次のように書ける．

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0, \quad \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} + K\nabla(\log\rho) = \nabla\phi, \quad \Delta\phi = \rho - e^{-\phi}. \tag{3a}$$

次の摂動半空間 Ω において，方程式系 (3a) の初期値境界値問題を取り扱う．

$$\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x') \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 > M(x')\}, \quad M \in \cap_{k=1}^{\infty} H^k(\mathbb{R}^2).$$

初期値及び境界値は，次にように課す．

$$(\rho, \boldsymbol{u})(0, x) = (\rho_0, \boldsymbol{u}_0)(x), \tag{3b}$$

$$\phi(t, M(x'), x') = \phi_b, \quad x' \in \mathbb{R}^2, \tag{3c}$$

$$\lim_{x_1\to\infty} (\rho, u_1, u_2, u_3, \phi)(t, x_1, x') = (1, u_+, 0, 0, 0). \tag{3d}$$

ここで，初期値 $(\rho_0, \boldsymbol{u}_0)$ は次を満たす．

$$\inf_{x\in\Omega} \rho_0(x) > 0, \quad \inf_{x\in\partial\Omega} \frac{\boldsymbol{u}_0(x)\cdot\nabla(M(x') - x_1)}{\sqrt{1 + |\nabla M(x')|^2}} - \sqrt{K} > 0. \tag{4}$$

境界値 ϕ_b は与えられた定数であり，無限遠の値 u_+ は，以下を満たす定数とする．

$$u_+^2 > K + 1, \quad u_+ < 0, \tag{5}$$

$$\inf_{x\in\partial\Omega} \frac{-u_+}{\sqrt{1 + |\nabla M(x')|^2}} - \sqrt{K} > 0. \tag{6}$$

条件 (5) は，Bohm 条件である．条件 (4) の第二式は，問題 (1) が可解となるための必要条件である．また，無限遠の値 $(1, u_+, 0, 0, 0)$ の近傍で，(1) の解を構成するのであれば，(6) も必要となる．

主結果を述べるために，半空間における平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{\phi}) = (\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, 0, 0, \tilde{\phi})(x_1)$ の存在定理を紹介する．この解は次を満たす．

$$(\tilde{\rho}\tilde{u}_1)' = 0, \quad \tilde{u}_1\tilde{u}_1' + K(\log\tilde{\rho})' = \tilde{\phi}', \quad \tilde{\phi}'' = \tilde{\rho} - e^{-\tilde{\phi}}, \quad x_1 > 0,$$
$$\tilde{\phi}(0) = \phi_b, \quad \lim_{x_1\to\infty} (\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi})(x_1) = (1, u_+, 0), \quad \inf_{x_1>0} \tilde{\rho}(x_1) > 0.$$

物理実験では，密度 $\tilde{\rho}$ や電位 $\tilde{\phi}$ は単調な関数として観測されるため，単調な平面定常解のみを考える．ここで，Sagdeev ポテンシャル V を次で定める．

$$V(\phi) := \int_0^{\phi} f^{-1}(\eta) - e^{-\eta}\,d\eta, \quad f(\rho) := K\log\rho + \frac{u_+^2}{2\rho^2} - \frac{u_+^2}{2}.$$

逆関数 f^{-1} については，以下に留意する．$u_+ = 0$ の場合，f は $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加であり，逆関数は $f^{-1}(\phi) := e^{\phi/K}$ となる．一方，$u_+ \neq 0$ の場合，f は区間 $I_1 := (0, |u_+|/\sqrt{K}\,]$ 上で狭義単調減少であり，区間 $I_2 := [\,|u_+|/\sqrt{K}, \infty)$ 上で狭義単調増加である．ここで，平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi})$ は $f(\tilde{\rho}) = \tilde{\phi}$ を満たさなければならなく，$\lim_{x\to\infty} \tilde{\rho}(x) = 1$ でもあることより，f の定義域を $\rho = 1$ を含む区間に制限し，逆関数 f^{-1} を定める．すなわち，$u_+^2 \leq K$ ならば f の定義域を I_2 に [3] 制限し，$u_+^2 > K$ ならば f の定義域を I_1 に制限する．平面定常解の一意的存在に関する結果を述べる．なお，$\mathbb{R}_+ := \{x_1 > 0\}$ とする．

定理 1. (**[19]**) (i) 無限遠の値 u_+ は $u_+^2 \leq K$ または $K + 1 \leq u_+^2$ のいずれかを満たすとする．このとき，単調な平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi}) \in [C(\overline{\mathbb{R}_+}) \cap C^1(\mathbb{R}_+)]^2 \times C(\overline{\mathbb{R}_+}) \cap C^2(\mathbb{R}_+)$ が一意的に存在するための必要十分条件は，

$$V(\phi_b) \geq 0, \quad \phi_b \geq f(|u_+|/\sqrt{K}) \tag{8}$$

である．とくに，$u_+^2 > K+1$ の場合，$|\phi_b|$ が十分に小さければ (8) が成り立ち，$(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi}) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ となる．

(ii) 無限遠の値 u_+ は $K < u_+^2 < K + 1$ を満たすとする．このとき，$\phi_b \neq 0$ ならば，平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi})$ は存在しない．一方，$\phi_b = 0$ ならば，平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{\phi})$ は定数解 $(1, u_+, 0)$ に限る．

平面定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, 0, 0, \tilde{\phi})(\tilde{M}(x))$ からの摂動を考え，問題 (1) の定常解 $(\rho^s, \boldsymbol{u}^s, \phi^s)(x)$ を構成した．ここで，$\tilde{M}(x) := x_1 - M(x')$ である．また，自然数 k 及び正定数 α に対して，関数空間 $H^k_\alpha(\Omega)$ を次で定める．

$$H^k_\alpha(\Omega) := \left\{ f \in H^k(\Omega) \;\middle|\; \|f\|^2_{k,\alpha} < \infty \right\}, \quad \|f\|^2_{k,\alpha} := \sum_{j=0}^{k} \int_\Omega e^{\alpha x_1} |\nabla^j f|^2 \, dx.$$

定常解 $(\rho^s, \boldsymbol{u}^s, \phi^s)$ の存在と安定性は，以下の定理にまとめられる．これらでは，領域 Ω の境界を表す関数 M のノルムに，如何なる制限も課されていない．

定理 2. (**[20]**) 無限遠の値 u_+ は (5) 及び (6) を満たし，$m \geq 3$ とする．このとき，ある正定数 δ があって，$\beta + |\phi_b| \leq \delta$ ならば，問題 (1) は定常解 $(\rho^s, \boldsymbol{u}^s, \phi^s)$ を持つ．この定常解は次を満たし，そのような定常解は唯一つである．

$$(\rho^s, u_1^s, u_2^s, u_3^s, \phi^s) - (\tilde{\rho} \circ \tilde{M}, \tilde{u} \circ \tilde{M}, 0, 0, \tilde{\phi} \circ \tilde{M}) \in [H^m_\beta(\Omega)]^4 \times H^{m+1}_\beta(\Omega),$$
$$\|(\rho^s - \tilde{\rho} \circ \tilde{M}, u_1^s - \tilde{u} \circ \tilde{M}, u_2^s, u_3^s)\|^2_{m,\beta} + \|\phi^s - \tilde{\phi} \circ \tilde{M}\|^2_{m+1,\beta} \leq C|\phi_b|.$$

ここで，C は ϕ_b に依らない正定数である．

定理 3. (**[20]**) 無限遠の値 u_+ は (5) 及び (6) を満たすとする．このとき，ある正定数 δ があって，$\beta + \|(\rho_0 - \rho^s, \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}^s)\|_{3,\beta} + |\phi_b| \leq \delta$ ならば，問題 (1) は時間大域解 $(\rho, \boldsymbol{u}, \phi)$ を持つ．この大域解は次を満たし，そのような大域解は唯一つである．

$$(\rho - \rho^s, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^s, \phi - \phi^s) \in \left[\bigcap_{i=0}^{1} C^i([0,T]; H^{3-i}_\beta(\Omega)) \right]^4 \times C([0,T]; H^4_\beta(\Omega)).$$

さらに，ϕ_b, t に依らない正定数 γ, C があって，次の減衰評価が成り立つ．

$$\sup_{x\in\Omega} |(\rho - \rho^s, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^s, \phi - \phi^s)(t,x)| \leq Ce^{-\gamma t}, \quad t \in [0, \infty).$$

[3] $u_+^2 = K$ の場合，$I_1 \cap I_2 = \{1\}$ となるが，f の定義域を I_1 に制限すると不具合が生じる．[19] を参照．

これらの定理より，Bohm 条件 (5) 及び必要条件 (6) は，摂動半空間におけるシース形成を保証すると結論づけられる．

3. 三次元円環領域における準中性極限

原点からの距離を $r = |x|$ で表し，方程式系 (1) の球面対称解を考える．また，密度 ρ と速度 $\boldsymbol{u}$ に代わり，$n = n(t,r) := r^2\rho(t,r)$ と $u = u(t,r) := \boldsymbol{u}(t,x)\cdot x/|x|$ を新たな未知関数とすると，次の方程式系を得る．

$$n_t + (nu)_r = 0, \quad u_t + uu_r + K(\log(r^{-2}n))_r = \phi_r, \quad \varepsilon\left(r^2\phi_r\right)_r = n - r^2 e^{-\phi}. \tag{9a}$$

ここで，長さスケールは円環の内殻の半径 r_i を選び，第三式に現れる ε は，(1c) にある ε と r_i^2 の比となる．この系を $I := (1, 1+L)$ で扱い，次の初期値及び境界値を課す．

$$(n,u)(0,r) = (n_0,u_0)(r), \tag{9b}$$

$$(n,u)(t,1+L) = ((1+L)^2, u_+), \quad \phi(t,1) = \phi_{\mathcal{L}}, \quad \phi_r(t,1+L) = 0. \tag{9c}$$

円環の内殻 $r = 1$ を固定壁，外殻 $r = 1+L$ をプラズマ領域にある仮想的な境界としている．また，$u_+ < 0$ 及び $\phi_{\mathcal{L}} \in \mathbb{R}$ は定数である．

小さな ε に対してシースの厚みを解析する．そのためには，問題 (9) の解に対する適切な近似解を構成し，その近似解が劇的に変化する r の範囲を求めればよい．次の形で与えられる近似解 (n^A, u^A, ϕ^A) を構成する．ただし，$m \geq 2$ とする．

$$\begin{aligned}(n^A,u^A,\phi^A)(t,r) &:= \sum_{j=0}^{m}\varepsilon^{j/2}(n^j,u^j,\phi^j)(t,r) + \sum_{j=0}^{m}\varepsilon^{j/2}(N^j_{\mathcal{L}},U^j_{\mathcal{L}},\Phi^j_{\mathcal{L}})\left(t,\frac{r-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\ &\quad + \sum_{j=0}^{m}\varepsilon^{j/2}(N^j_{\mathcal{R}},U^j_{\mathcal{R}},\Phi^j_{\mathcal{R}})\left(t,\frac{1+L-r}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + E^m.\end{aligned}$$

ここで，$(n^j,u^j,\phi^j) = (n^j,u^j,\phi^j)(t,r)$ は外部解，$(N^j_{\mathcal{L}},U^j_{\mathcal{L}},\Phi^j_{\mathcal{L}}) = (N^j_{\mathcal{L}},U^j_{\mathcal{L}},\Phi^j_{\mathcal{L}})(t,\bar{r})$ は内殻側に対応する内部解，$(N^j_{\mathcal{R}},U^j_{\mathcal{R}},\Phi^j_{\mathcal{R}}) = (N^j_{\mathcal{R}},U^j_{\mathcal{R}},\Phi^j_{\mathcal{R}})(t,\tilde{r})$ は外殻側に対応する内部解である．また，補正項 E^m により，近似解 (n^A,u^A,ϕ^A) は境界条件 (9c) を満たす．

近似解 (n^A,u^A,ϕ^A) を，j に関して帰納的に定義していくが，各 j では外殻側に対応する内部解，外部解，内殻側に対応する内部解の順に決めていく．まず，$(N^0_{\mathcal{R}},U^0_{\mathcal{R}},\Phi^0_{\mathcal{R}}) = (0,0,0)$ とする．外部解 (n^0,u^0,ϕ^0) は，次の非線形双曲型方程式系の初期値境界値問題の解とする．ただし，初期値 (n^0_0,u^0_0) は，全ての次数の整合条件を満たすとする．

$$\begin{gathered}n^0_t + (n^0u^0)_r = 0, \quad u^0_t + u^0u^0_r + K(\log(r^{-2}n^0))_r = \phi^0_r, \quad n^0 - r^2e^{-\phi^0} = 0, \quad t>0,\ r\in I,\\ (n^0,u^0)(0,r) = (n^0_0,u^0_0)(r) \in H^\infty(I) := \cap_{k\geq 1}^{\infty}H^k(I),\\ |\phi_{\mathcal{L}} + \log n^0_0(1)| > 0, \quad \inf_{r\in I}n^0_0(r) > 0, \quad \inf_{r\in\{1,1+L\}}((u^0_0)^2 - K - 1)(r) > 0, \quad \sup_{r\in\{1,1+L\}}u^0_0(r) < 0,\\ (n^0,u^0)(t,1+L) = ((1+L)^2,u_+).\end{gathered}$$

内部解 $(N^0_{\mathcal{L}}, U^0_{\mathcal{L}}, \Phi^0_{\mathcal{L}})$ は，次の[4]非線形常微分方程式の初期値問題を解いて定める．

$$\begin{cases} \big(n^0(t,1)U^0_{\mathcal{L}} + N^0_{\mathcal{L}}u^0(t,1) + N^0_{\mathcal{L}}U^0_{\mathcal{L}}\big)_{\bar r} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\big(2u^0(t,1)U^0_{\mathcal{L}} + (U^0_{\mathcal{L}})^2\big)_{\bar r} + K\big(\log(n^0(t,1)+N^0_{\mathcal{L}}) - \log n^0(t,1)\big)_{\bar r} = \Phi^0_{\mathcal{L},\bar r}, \\ -\Phi^0_{\mathcal{L},\bar r\bar r} + N^0_{\mathcal{L}} - e^{-\phi^0(t,1)-\Phi^0_{\mathcal{L}}} + e^{-\phi^0(t,1)} = 0, \qquad \bar r \in (0,\infty), \end{cases}$$

$$\Phi^0_{\mathcal{L}}(t,0) = \phi_{\mathcal{L}} - \phi^0(t,1), \quad \lim_{\bar r\to\infty}(N^0_{\mathcal{L}}, U^0_{\mathcal{L}}, \Phi^0_{\mathcal{L}})(t,\bar r) = (0,0,0).$$

次に，$j \geq 1$ の場合を考える．なお，$\mathcal{J}^{j-1}_{\log}(n)$, $\mathcal{J}^{j-1}_{\exp}(\phi)$, $\mathcal{RF}^{j-1}_i$, $\mathcal{LF}^{j-1}_i$ は，$j-1$ 次までの内部解と外部解によって基本的には定まるが，これらの定義は次章で述べる．外殻側に対応する内部解 $(N^j_{\mathcal{R}}, U^j_{\mathcal{R}}, \Phi^j_{\mathcal{R}})$ は，次の線形常微分方程式の境界値問題を解いて定める．

$$\begin{cases} -\big(u^0(t,1+L)N^j_{\mathcal{R}} + n^0(t,1+L)U^j_{\mathcal{R}}\big)_{\tilde r} = -\mathcal{RF}^{j-1}_1, \\ -\big(K(n^0(t,1+L))^{-1}N^j_{\mathcal{R}} + u^0(t,1+L)U^j_{\mathcal{R}} - \Phi^j_{\mathcal{R}}\big)_{\tilde r} = -\mathcal{RF}^{j-1}_2, \\ -(1+L)^2\Phi^j_{\mathcal{R},\tilde r\tilde r} + (1+L)^2 e^{-\phi^0(t,1+L)}\Phi^j_{\mathcal{R}} + N^j_{\mathcal{R}} = \mathcal{RF}^{j-1}_3, \qquad \tilde r \in (0, L/\sqrt{\epsilon}), \end{cases}$$

$$N^j_{\mathcal{R}}(t,L/\sqrt{\epsilon}) = U^j_{\mathcal{R}}(t,L/\sqrt{\epsilon}) = 0, \quad \Phi^j_{\mathcal{R},\tilde r}(t,0) = -\phi^{j-1}_r(t,1+L), \quad \Phi^j_{\mathcal{R}}(t,L/\sqrt{\epsilon}) = 0.$$

外部解 (n^j, u^j, ϕ^j) は，次の線形双曲型方程式系の初期値境界値問題を解いて定める．

$$\begin{cases} n^j_t + (n^j u^0)_r + (n^0 u^j)_r = -\displaystyle\sum_{l=1}^{j-1}(n^l u^{j-l})_r, \\ u^j_t + (u^j u^0)_r + K\big((n^0)^{-1}n^j\big)_r - \phi^j_r = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{l=1}^{j-1}(u^l u^{j-l})_r - \big(\mathcal{J}^{j-1}_{\log}(n)\big)_r, \\ n^j + r^2 e^{-\phi^0}\phi^j = (r^2\phi^{j-2}_r)_r + r^2\big(\mathcal{J}^{j-1}_{\exp}(\phi)\big), \qquad (t,r) \in (0,T]\times I, \end{cases}$$

$$(n^j, u^j)(0,r) = (n^j_0, u^j_0)(r), \quad (n^j, u^j)(t,1+L) = -(N^j_{\mathcal{R}}(t,0), U^j_{\mathcal{R}}(t,0)).$$

なお，$j=1$ のときは，$\sum_{l=1}^0 a_l = \phi^{-1} = 0$ とする．内殻側に対応する内部解 $(N^j_{\mathcal{L}}, U^j_{\mathcal{L}}, \Phi^j_{\mathcal{L}})$ は，次の線形常微分方程式の境界値問題を解いて定める．

$$\begin{cases} \big((u^0(t,1) + U^0_{\mathcal{L}})N^j_{\mathcal{L}} + (n^0(t,1) + N^0_{\mathcal{L}})U^j_{\mathcal{L}}\big)_{\bar r} = -\mathcal{LF}^{j-1}_1, \\ \big(K(n^0(t,1) + N^0_{\mathcal{L}})^{-1}N^j_{\mathcal{L}} + (u^0(t,1) + U^0_{\mathcal{L}})U^j_{\mathcal{L}} - \Phi^j_{\mathcal{L}}\big)_{\bar r} = -\mathcal{LF}^{j-1}_2, \\ -\Phi^j_{\mathcal{L},\bar r\bar r} + e^{-\phi^0(t,1)-\Phi^0_{\mathcal{L}}}\Phi^j_{\mathcal{L}} + N^j_{\mathcal{L}} = \mathcal{LF}^{j-1}_3, \qquad \bar r \in (0, L/\sqrt{\epsilon}), \end{cases}$$

$$N^j_{\mathcal{L}}(t,L/\sqrt{\epsilon}) = -\frac{n^0(t,1) + N^0_{\mathcal{L}}(t,L/\sqrt{\epsilon})}{\big(u^0(t,1) + U^0_{\mathcal{L}}(t,L/\sqrt{\epsilon})\big)^2 - K}\Phi^j_{\mathcal{L}}(t,L/\sqrt{\epsilon}),$$

$$U^j_{\mathcal{L}}(t,L/\sqrt{\epsilon}) = \frac{u^0(t,1) + U^0_{\mathcal{L}}(t,L/\sqrt{\epsilon})}{\big(u^0(t,1) + U^0_{\mathcal{L}}(t,L/\sqrt{\epsilon})\big)^2 - K}\Phi^j_{\mathcal{L}}(t,L/\sqrt{\epsilon}),$$

$$\Phi^j_{\mathcal{L}}(t,0) = -\phi^j(t,1), \quad \Phi^j_{\mathcal{L},\bar r}(t,L/\sqrt{\epsilon}) = 0.$$

さらに，補正項 E^m を次で定める．

$$E^m := \varepsilon^{(m+1)/2}\big(n^{m+1}, u^{m+1}, 0\big)(t,r) + \varepsilon^{(m+1)/2}\big(N^{m+1}_{\mathcal{R}}, U^{m+1}_{\mathcal{R}}, \Phi^{m+1}_{\mathcal{R}}\big)\left(t, \frac{1+L-r}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

$$+\Big(-\sum_{j=0}^m \varepsilon^{j/2}N^j_{\mathcal{L}}\big(t,L/\sqrt{\epsilon}\big), -\sum_{j=0}^m \varepsilon^{j/2}U^j_{\mathcal{L}}\big(t,L/\sqrt{\epsilon}\big), (1-r)\Phi^0_{\mathcal{L},r}(t,L/\sqrt{\epsilon})\Big).$$

[4] $\bar r$ を変数，t をパラメータとみなす．

問題(9)では双曲・楕円型連立方程式系を解かなければならないが，近似解(n^A, u^A, ϕ^A)が満たす方程式系は，方程式の型が違う連立系ではない．さらに，$j \geq 1$では線形である．これらの方程式系の導出は[14]で詳述され，その可解性は[13]で示されている．

定理 4. **([13])** $u_+^2 > K+1$とする．このとき，ある正定数$\delta_0, \varepsilon_0, T$があって，$|\phi_{\mathcal{L}} + \log n_0^0(1)| < \delta_0$かつ$\varepsilon < \varepsilon_0$であれば，適切な初期値$(n_0^j, u_0^j) \in H^\infty(I)$ $(j \geq 1)$に対して，近似解$(n^A, u^A, \phi^A) \in C^\infty([0,T] \times \bar{I})$は*well-defined*であり，$k \geq 0$に対して次が成り立つ．ここで，$\gamma, c, C$は$\varepsilon$に依らない正定数である．

$$(n^A, u^A)(t, 1+L) = ((1+L)^2, u_+), \quad \phi^A(t,1) = \phi_{\mathcal{L}}, \quad \phi_r^A(t, 1+L) = 0, \tag{10}$$

$$\inf_{r \in I,\ t \in [0,T]} n^A(t,r) > \gamma, \tag{11}$$

$$\inf_{r \in \{1, 1+L\},\ t \in [0,T]} ((u^A)^2 - K - 1)(t,r) > \gamma, \qquad \sup_{r \in \{1, 1+L\},\ t \in [0,T]} u^A(t,r) < -\gamma, \tag{12}$$

$$\sup_{t \in [0,T]} |\partial_r^k (n^A, u^A, \phi^A)(t,r)| \leq C \left(\varepsilon^{-k/2} e^{-c(r-1)/\sqrt{\varepsilon}} + \varepsilon^{-(k-1)/2} e^{-c(1+L-r)/\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right). \tag{13}$$

定理4の注意を述べる．まず，(9c)及び(10)より，近似解(n^A, u^A, ϕ^A)と真の解(n, u, ϕ)は，全く同じ境界条件を満たすことが分かる．さらに，$k=1$とした(13)より，小さなεに対して，近似解が急減に変化しているrの範囲は，円環の内殻$r=1$から$O(\sqrt{\varepsilon})$までの距離であることが分かる．これは，シースの厚みが，Debye長$\sqrt{\varepsilon}$のオーダーであることを意味する．また，近似解(n^A, u^A, ϕ^A)が真の解(n, u, ϕ)を良く近似できていることは，次の定理によって保証される．

定理 5. **([13])** $u_+^2 > K+1$とする．初期値(n_0, u_0)は次の形で書け，適切な整合条件を満たすとする．

$$(n_0, u_0)(r) = (n^A(0,r) + \varepsilon^{m/2} f_n(r), u^A(0,r) + \varepsilon^{m/2} f_u(r)), \quad (f_n, f_u) \in H^2(I).$$

このとき，ある正定数$\delta_0, \varepsilon_0, T_0$があって，$|\phi_{\mathcal{L}} + \log n_0^0(1)| < \delta_0$かつ$\varepsilon < \varepsilon_0$であれば，問題(9)は解$(n, u, \phi)$を持つ．この解は次を満たし，そのような解は一意である．

$$(n, u, \phi) \in \left[\bigcap_{i=0}^{1} C^i([0, T_0]; H^{2-i}(I)) \right]^2 \times C([0, T_0]; H^3(I)),$$

$$\inf_{r \in I,\ t \in [0,T_0]} n(t,r) \geq \gamma/2,$$

$$\inf_{r \in \{1, 1+L\},\ t \in [0,T_0]} (u^2 - K - 1)(t,r) \geq \gamma/2, \qquad \sup_{r \in \{1, 1+L\},\ t \in [0,T_0]} u(t,r) \leq -\gamma/2.$$

ここで，γは(11), (12)と同じものである．さらに，εに依らない正定数Cがあって，次の誤差評価が成り立つ．

$$\sup_{t \in [0,T_0]} \big(\|(n - n^A, u - u^A, \phi - \phi^A)(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\partial_r (n - n^A, u - u^A, \phi - \phi^A)(t)\|_{L^2}^2$$
$$+ \varepsilon^{5/2} \|\partial_r^2 (n - n^A, u - u^A, \phi - \phi^A)(t)\|_{L^2}^2 \big) \leq C \varepsilon^m.$$

4. 補遺

本章では，$\mathcal{J}^{j-1}_{\log}(n)$, $\mathcal{J}^{j-1}_{\exp}(\phi)$, $\mathcal{RF}^{j-1}_i$, $\mathcal{LF}^{j-1}_i$ の定義を述べる．まず，$\mathcal{J}^{j-1}_{\log}(n)$, $\mathcal{J}^{j-1}_{\exp}(\phi)$ は，$j=1$ では $\mathcal{J}^{0}_{\log}(n)=\mathcal{J}^{0}_{\exp}(\phi)=0$ とし，$j\geq 2$ では次で定める．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^{j-1}_{\log}(n) &:= K\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(n^0)^{-k}\sum_{|\alpha|=k,\ \|\alpha\|=j,\ \alpha_j=0}\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} n^{\alpha},\\
\mathcal{J}^{j-1}_{\exp}(\phi) &:= \sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k}}{k!}e^{-\phi^0}\sum_{|\alpha|=k,\ \|\alpha\|=j,\ \alpha_j=0}\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} \phi^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1},\quad \|\alpha\| = \alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(j-1)\alpha_{j-1},\\
&\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{j-1}!},\quad u^{\alpha} = \left(u^1\right)^{\alpha_1}\cdots\left(u^{j-1}\right)^{\alpha_{j-1}}.
\end{aligned}
$$

残りの $\mathcal{RF}^{j-1}_i$, $\mathcal{LF}^{j-1}_i$ を定義するため，いくつか記号を準備する．

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}^j_1(N) := K(n^0+N^0)^{-1}(n^j+N^j)-K(n^0)^{-1}n^j, && \mathcal{J}^{j-1}_1(N) := \mathcal{J}^{j-1}_{\log}(n+N)-\mathcal{J}^{j-1}_{\log}(n),\\
&\mathcal{I}^j_2(\Phi) := -e^{-\phi^0-\Phi^0}(\phi^j+\Phi^j)+e^{-\phi^0}\phi^j, && \mathcal{J}^{j-1}_2(\Phi) := \mathcal{J}^{j-1}_{\exp}(\phi+\Phi)-\mathcal{J}^{j-1}_{\exp}(\phi).
\end{aligned}
$$

さらに, $a=1,1+L$ として，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^j_{1,a}(N) &:= K(n^0(t,a)+N^0)^{-1}(n^j(t,a)+N^j)-K(n^0(t,a))^{-1}n^j(t,a),\\
\mathcal{I}^j_{2,a}(\Phi) &:= -e^{-\phi^0(t,a)-\Phi^0}(\phi^j(t,a)+\Phi^j)+e^{-\phi^0(t,a)}\phi^j(t,a),\\
V^j_a &:= \begin{cases} K\log(n^0(t,a)+N^0)-K\log(n^0(t,a)), & j=0,\\ \mathcal{I}^1_{1,a}(N)+\epsilon^{-1/2}\Big(K\log(n^0+N^0)-K\log(n^0)-V^0_a\Big), & j=1,\\ \mathcal{I}^j_{1,a}(N)+\mathcal{J}^{j-1}_1(N)+\epsilon^{-1/2}(\mathcal{I}^{j-1}_1(N)-\mathcal{I}^{j-1}_{1,a}(N)), & j\geq 2,\end{cases}\\
W^j_a &:= \begin{cases} e^{-\phi^0(t,a)-\Phi^0}-e^{-\phi^0(t,a)}, & j=0,\\ \mathcal{I}^1_{2,a}(\Phi)+\epsilon^{-1/2}\big(e^{-\phi^0-\Phi^0}-e^{-\phi^0}-W^0_a\big), & j=1,\\ \mathcal{I}^j_{2,a}(\Phi)+\mathcal{J}^{j-1}_2(\Phi)+\epsilon^{-1/2}(\mathcal{I}^{j-1}_2(\Phi)-\mathcal{I}^{j-1}_{2,a}(\Phi)), & j\geq 2.\end{cases}
\end{aligned}
$$

さて，$\mathcal{RF}_i^{j-1}$ を定めよう．$j=1$ では $\mathcal{RF}_1^0=\mathcal{RF}_2^0=\mathcal{RF}_3^0=0$ とし，$j\geq 2$ では次で定める．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{RF}_1^{j-1} := N_{\mathcal{R},t}^{j-1} &+ \epsilon^{-1/2} \sum_{\substack{l+k=j-1,\\ l,k\geq 0}} \big((n^l - n^l(t,1+L))U_{\mathcal{R}}^k + (u^k - u^k(t,1+L))N_{\mathcal{R}}^l\big)_{\bar{r}} \\
&+ \sum_{l=1}^{j-1} \big(n^l(t,1+L)U_{\mathcal{R}}^{j-l} + N_{\mathcal{R}}^l u^{j-l}(t,1+L) + N_{\mathcal{R}}^l U_{\mathcal{R}}^{j-l}\big)_{\bar{r}}, \\
\mathcal{RF}_2^{j-1} := U_{\mathcal{R},t}^{j-1} &+ \frac{1}{2}\epsilon^{-1/2} \sum_{\substack{l+k=j-1,\\ l,k\geq 0}} \big((u^l - u^l(t,1+L))U_{\mathcal{R}}^k + (u^k - u^k(t,1+L))U_{\mathcal{R}}^l\big)_{\bar{r}} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{j-1} \big(u^l(t,1+L)U_{\mathcal{R}}^{j-l} + U_{\mathcal{R}}^l u^{j-l}(t,1+L) + U_{\mathcal{R}}^l U_{\mathcal{R}}^{j-l}\big)_{\bar{r}} \\
&+ \big(\mathcal{J}_1^{j-1}(N_{\mathcal{R}}) + \epsilon^{-1/2}(\mathcal{I}_1^{j-1}(N_{\mathcal{R}}) - \mathcal{I}_{1,1+L}^{j-1}(N_{\mathcal{R}}))\big)_{\bar{r}}, \\
\mathcal{RF}_3^{j-1} := \epsilon^{-1/2}&(r^2-(1+L)^2)W_{1+L}^{j-1} + (\epsilon^{-1/2}(r^2-(1+L)^2)\Phi_{\mathcal{R},\bar{r}}^{j-1})_{\bar{r}} \\
&+ (1+L)^2\big(\mathcal{J}_2^{j-1}(\Phi_{\mathcal{R}}) + \epsilon^{-1/2}(\mathcal{I}_2^{j-1}(\Phi_{\mathcal{R}}) - \mathcal{I}_{2,1+L}^{j-1}(\Phi_{\mathcal{R}}))\big).
\end{aligned}
$$

また，$\mathcal{LF}_i^{j-1}$ $(j\geq 1)$ については，次で定める．ただし，$\sum_{l=1}^0 a_l = 0$ である．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{LF}_1^{j-1} := N_{\mathcal{L},t}^{j-1} &+ \epsilon^{-1/2} \sum_{\substack{l+k=j-1,\\ l,k\geq 0}} \big((n^l - n^l(t,1))U_{\mathcal{L}}^k + (u^k - u^k(t,1))N_{\mathcal{L}}^l\big)_{\bar{r}} \\
&+ \sum_{l=1}^{j-1} \big(n^l(t,1)U_{\mathcal{L}}^{j-l} + N_{\mathcal{L}}^l u^{j-l}(t,1) + N_{\mathcal{L}}^l U_{\mathcal{L}}^{j-l}\big)_{\bar{r}} + \big(u^j(t,1)N_{\mathcal{L}}^0 + n^j(t,1)U_{\mathcal{L}}^0\big)_{\bar{r}}, \\
\mathcal{LF}_2^{j-1} := U_{\mathcal{L},t}^{j-1} &+ \frac{1}{2}\epsilon^{-1/2} \sum_{\substack{l+k=j-1,\\ l,k\geq 0}} \big((u^l - u^l(t,1))U_{\mathcal{L}}^k + (u^k - u^k(t,1))U_{\mathcal{L}}^l\big)_{\bar{r}} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{j-1} \big(u^l(t,1)U_{\mathcal{L}}^{j-l} + U_{\mathcal{L}}^l u^{j-l}(t,1) + U_{\mathcal{L}}^l U_{\mathcal{L}}^{j-l}\big)_{\bar{r}} + V_1^j - \mathcal{I}_{1,1}^j(N_{\mathcal{L}}) \\
&+ \big(u^j(t,1)U_{\mathcal{L}}^0 + Kn^j(t,1)\big((n^0(t,1)+N_{\mathcal{L}}^0)^{-1} - (n^0(t,1))^{-1}\big)\big)_{\bar{r}}, \\
\mathcal{LF}_3^{j-1} := \epsilon^{-1/2}&(r^2-1)W_1^{j-1} + (\epsilon^{-1/2}(r^2-1)\Phi_{\mathcal{L},\bar{r}}^{j-1})_{\bar{r}} \\
&+ W_1^j - \mathcal{I}_{2,1}^j(\Phi_{\mathcal{L}}) - \big(e^{-\phi^0(t,1)-\Phi_{\mathcal{L}}^0} - e^{-\phi^0(t,1)}\big)\phi^j(t,1).
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] A. Ambroso, *Stability for solutions of a stationary Euler–Poisson problem*, Math. Models Methods Appl. Sci. **16** (2006), 1817–1837.

[2] A. Ambroso, F. Méhats and P.-A. Raviart, *On singular perturbation problems for the nonlinear Poisson equation*, Asympt. Anal. **25** (2001), 39–91.

[3] J. Bae and B. Kwon, *Small amplitude limit of solitary waves for the Euler-Poisson system*, J. Differential Equations **266** (2019), 3450–3478.

[4] D. Bohm, *Minimum ionic kinetic energy for a stable sheath*, in The characteristics of electrical discharges in magnetic fields, A. Guthrie and R.K.Wakerling eds., McGraw-Hill, New York, (1949), 77–86.

[5] F. F. Chen, Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, 2nd edition, Springer, 1984.

[6] S. Cordier and E. Grenier, *Quasineutral limit of an Euler–Poisson system arising from plasma physics*, Comm. Partial Differential Equations **25** (2000), 1099–1113.

[7] S. Cordier, P. Degond, P. Markowich and C. Schmeiser, *Travelling wave analysis and jump relations for Euler–Poisson model in the quasineutral limit*, Asymptotic Anal. **11** (1995), 209–240.

[8] D. Gérard-Varet, D. Han-Kwan, and F. Rousset, *Quasineutral limit of the Euler–Poisson system for ions in a domain with boundaries II*, J. Éc. polytech. Math. **1** (2014), 343–386.

[9] E. Grenier, Y. Guo, B. Pausader, and M. Suzuki, *Derivation of the ion equation*, Quart. Appl. Math. **78** (2020), 305–332.

[10] Y. Guo and B. Pausader, *Global Smooth Ion Dynamics in the Euler–Poisson System*, Comm. Math. Phys. **303** (2011), 89–125,

[11] M. Haragus and A. Scheel, *Linear stability and instability of ion-acoustic plasma solitary waves*, Physica D **170** (2002), 13–30.

[12] C.-Y. Jung, B. Kwon, and M. Suzuki, *Quasi-neutral limit for the Euler–Poisson system in the presence of plasma sheaths with spherical symmetry*, Math. Models Methods Appl. Sci. **26** (2016), 2369–2392.

[13] C.-Y. Jung, B. Kwon, and M. Suzuki, *Quasi-neutral limit for Euler–Poisson system in the presence of boundary layers in an annular domain*, J. Differential Equations **269** (2020), 8007–8054.

[14] C.-Y. Jung, B. Kwon, and M. Suzuki, *On approximate solutions to the Euler–Poisson system with boundary layers*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **96** (2021), 105717.

[15] I. Langmuir, *The interaction of electron and positive ion space charges in cathode sheaths*, Phys. Rev. **33** (1929), pp. 954–989.

[16] M. A. Lieberman and A. J. Lichtenberg, Principles of Plasma Discharges and Materials Processing, 2^{nd} edition, Wiley-Interscience, 2005.

[17] S. Nishibata, M. Ohnawa, and M. Suzuki, *Asymptotic stability of boundary layers to the Euler–Poisson equations arising in plasma physics*, SIAM J. Math. Anal. **44** (2012), 761–790.

[18] K.-U. Riemann, *The Bohm criterion and sheath formation*, J. Phys. D: Appl. Phys. **24** (1991), 493–518.

[19] M. Suzuki, *Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler–Poisson equations arising in plasma physics*, Kinet. Relat. Models **4** (2011), 569–588.

[20] M. Suzuki and M. Takayama, *Stability and existence of stationary solutions to the Euler-Poisson equations in a domain with a curved boundary*, Arch. Ration. Mech. Anal. **239** (2021), 357–387.