

半導体中の電子流を記述する流体力学モデルの定常解

鈴木 政尋 (東京工業大学情報理工学研究科)

西畑 伸也 (東京工業大学情報理工学研究科)

本講演では1次元有界領域 $\Omega := (0, 1)$ における半導体中の電子の流れを記述する流体力学モデルに対する初期境界値問題の定常解についての漸近安定性について考察する。半導体中の電子の動きは次の方程式によって表される。

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (1a)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = \rho \phi_x - \rho u, \quad (1b)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (1c)$$

ここで ρ, u, ϕ は未知関数でそれぞれ電子密度, 電子速度, 電位を表している。従って, ρu は電流密度を表す。また, 圧力については $p(\rho) = K\rho^\gamma$ ($K > 0, \gamma \geq 1$) であるとす。さらに, Doping profile $D(x)$ は有界連続関数であり, 次を仮定する。

$$\inf_{x \in (0,1)} D(x) > 0. \quad (2)$$

初期値と境界値については次のようにおく。

$$(\rho, u)(0, x) = (\rho_0, u_0)(x), \quad (3)$$

$$\rho(t, 0) = \rho_l > 0, \quad \rho(t, 1) = \rho_r > 0, \quad (4)$$

$$\phi(t, 0) = 0, \quad \phi(t, 1) = \phi_r > 0. \quad (5)$$

ここで, ρ_l, ρ_r, ϕ_r は定数である。さらに, $x = 0, x = 1$ で両立条件 (compatibility condition) を満たすとする。すなわち, $\rho(0, 0) = \rho_l, \rho(0, 1) = \rho_r, (\rho u)_x(0, 0) = 0, (\rho u)_x(0, 1) = 0$ である。初期値に対しては亜音速条件と密度の強正值性を仮定する。

$$\inf_{x \in (0,1)} (p'(\rho_0(x)) - u_0^2(x)) > 0, \quad \inf_{x \in (0,1)} \rho_0(x) > 0. \quad (6)$$

この条件下で (ρ, u) が (ρ_0, u_0) の近傍にあるとき, (ρ, u) はやはり亜音速条件と密度の強正值性を満たす。

$$\inf_{x \in (0,1)} (p'(\rho) - u^2) > 0, \quad (7a)$$

$$\inf_{x \in (0,1)} \rho > 0. \quad (7b)$$

本研究の目的は定常解の漸近安定性を示すことである。定常解とは時間に依存しない(1)の解であり, 境界条件(4), (5)を満たすものである。すなわち, 定常解は次の方程式と条件を満たす。

$$(\tilde{\rho} \tilde{u})_x = 0, \quad (8a)$$

$$(\tilde{\rho} \tilde{u}^2 + p(\tilde{\rho}))_x = \tilde{\rho} \tilde{\phi}_x - \tilde{\rho} \tilde{u}, \quad (8b)$$

$$\tilde{\phi}_{xx} = \tilde{\rho} - D, \quad (8c)$$

$$\tilde{\rho}(0) = \rho_l > 0, \quad \tilde{\rho}(1) = \rho_r > 0, \quad \tilde{\phi}(0) = 0, \quad \tilde{\phi}(1) = \phi_r > 0. \quad (9)$$

先行結果 [1], [2] では, この問題を Doping profile D が定数に近いという仮定の下で定常解の漸近安定性を示している. しかし, 物理的に意味のある設定ではこの仮定は満たされない. [3] では, Doping profile が定数に近いという仮定なしで, 定常解の漸近安定性が示されているが, 周期境界条件下でこの問題を取り扱っていた. 従って, 物理的観点からより興味深い Dirichlet 境界条件 (4), (5) に対する定常解の漸近安定性の解析が必要とされていた.

次の Lemma 1 は定常解の存在を示している.

Lemma 1 *Doping profile* と境界条件は (2), (4), (5) を満たすとする. 任意の $\rho_l > 0$ に対して, ある $\delta_1 > 0$ が存在して, $|\rho_l - \rho_r| + |\phi_r| \leq \delta_1$ であれば, 定常問題 (8), (9) に定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\phi})(x) \in \mathcal{B}^2(\Omega)$ が一意的に存在して (7) を満たす.

初期境界値問題については以下の関数空間において考える.

$$\mathfrak{X}_2([0, T]) := \bigcap_{k=0}^2 C^k([0, T]; H^{2-k}(\Omega)), \quad \mathfrak{X}_2^2([0, T]) := \bigcap_{k=0}^2 C^k([0, T]; H^{4-k}(\Omega)).$$

本研究の主定理は以下の通りである.

Theorem 2 $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{\phi})$ を (8), (9) を満たす定常解とする. 初期値 $(\rho_0, u_0) \in H^2(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (6), (4), (5) を満たすとする. さらに, 両立条件を仮定する. このとき, ある $\delta_2 > 0$ が存在して, $|\rho_l - \rho_r| + |\phi_r| + \|(\rho_0 - \tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u})\|_2 \leq \delta_2$ であれば, 初期境界値問題 (1), (3), (4), (5) に解 $(\rho, u, \phi) \in \mathfrak{X}_2([0, \infty))$ が一意的に存在する. さらに, $(\rho - \tilde{\rho}, u - \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_2([0, \infty))$, $(\phi - \tilde{\phi}) \in \mathfrak{X}_2^2([0, \infty))$ であり, 以下の減衰評価を満たす.

$$\|(\rho - \tilde{\rho}, u - \tilde{u})(t)\|_2 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_4 \leq C \|(\rho_0 - \tilde{\rho}, u_0 - \tilde{u})\|_2 e^{-\alpha t} \quad (10)$$

ここで C と α は正の定数で時間 t に依らない.

記号 非負の整数 $i \geq 0$ について, $H^i(\Omega)$ は Sobolev 空間であり, そのノルムを $\|\cdot\|_i$ と書く. 非負の整数 $i \geq 0$ について, $\mathcal{B}^i(\Omega)$ は Hölder 空間である.

参考文献

- [1] P. DEGOND AND P. MARKOWICH, On a one-dimensional steady-state hydrodynamic model, *Appl. Math. Lett.* **3** (1990), 25–29.
- [2] H. LI, P. MARKOWICH AND M. MEI, Asymptotic behaviour of solutions of the hydrodynamic model of semiconductors, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **132** (2002), 359–378.
- [3] A. MATSUMURA AND T. MURAKAMI, Asymptotic behaviour of solutions of solutions for a fluid dynamical model of semiconductor equation, to appear.